Licht und Materie Übung II.1

Übungstermine: Gruppe 1 Di 24.04.18 (Raum 2.346), Gruppe 2 Do 26.04.18 (Raum 2.558), Gruppe 3 Fr 27.04.18 (Raum 2.558)

Hinweise: Jedes Übungsblatt besteht aus zwei regulären (gekennzeichnet mit einem *B*) und einer anspruchsvolleren *M*-Aufgabe. Die Aufgabenteile (a), (b), ... sind entsprechend ihrer Schwierigkeit mit Punkten gewichtet. Zur Erlangung des Scheins benötigen Bachelor- und Lehramtsstudenten 50% der gesamten Punktzahl (kombiniert aus *B*- und *M*-Aufgaben). Masterstudenten benötigen 50% der gesamten Punktzahl und zusätzlich 50% der Punktzahl aller *M*-Aufgaben. Es muss mindestens einmal an der Tafel vorgerechnet werden.

Aufgabe 1 Kramers-Kronig Relationen 1 (B, 20 P)

In der Vorlesung haben Sie die Kramers-Kronig Relationen kennengelernt, die Real- und Imaginärteil komplexwertiger physikalischer Antwortfunktionen $\hat{g}(\omega) = g_1(\omega) + ig_2(\omega)$ miteinander verknüpfen. Sie lauten

$$\Re(\hat{g}(\omega)) = \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im(\hat{g}(x))}{x-\omega}dx$$
$$\Im(\hat{g}(\omega)) = -\frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Re(\hat{g}(x))}{x-\omega}dx$$

wobei $\mathcal{P}\int$ das Hauptwertintegral bezeichnet.

a) (5 P) Betrachten Sie die optische Leitfähigkeit $\hat{\sigma}(\omega) = \sigma_1(\omega) + i\sigma_2(\omega)$. Berechnen Sie $\sigma_2(\omega)$ für den Fall eines perfekten Leiters mit $\sigma_1(\omega) = A\delta(\omega)$. Welche Materialien werden im Grenzfall niedriger Frequenzen durch eine solche Leitfähigkeit beschrieben?

b) (10 P) Der Realteil der optischen Leitfähigkeit einfacher Metalle wird durch
$$\sigma_1(\omega) = \frac{\sigma_0}{1+\omega^2\tau^2}$$
beschrieben, wobei σ_0 die Gleichstromleitfähigkeit und τ die Streuzeit bezeichnen. Berechnen sie den entsprechenden Imaginärteil $\sigma_2(\omega)$ der Leitfähigkeit.

c) (5 P) Es sei nun $\hat{g}(\omega) = \hat{\chi}(\omega)$ die komplexwertige Suszeptibilität. Zeigen Sie, dass es kein (reales) dispersionsfreies Material geben kann (d.h. bei dem die optischen Funktionen keine Frequenzabhängigkeit aufweisen). Hinweis: Nehmen Sie χ_1 als Konstante an und führen Sie dies zu einem Widerspruch.

Aufgabe 2 Lorentz-Modell (B, 20 P)

a) (5 P) Skizzieren Sie den Verlauf der komplexen dielektrischen Funktion $\varepsilon(\omega)$ für den Fall eines Lorentz-Oszillators. Die Resonanzfrequenz sei gegeben als $\omega_0 = 100\ cm^{-1}$, die Plasmafrequenz als $\omega_p = 500\ cm^{-1}$ und die Dämpfung als $\tau = 50\ cm^{-1}$. Skizzieren Sie zudem für dieses Beispiel die komplexe optische Leitfähigkeit $\sigma(\omega)$.

b) (5 P) Skizzieren Sie wie in a) den Verlauf der dielektrischen Funktion und der optischen Leitfähigkeit, nur dieses Mal mit einer Resonanzfrequenz von $\omega_0 = 200\ cm^{-1}$ (andere Parameter bleiben gleich).

c) (10 P) Die Nullstellen des Realteils der dielektrischen Funktion liegen ungefähr bei $\omega_0(\epsilon_1(\omega_0 + \delta_1)) = 0$ und $\omega_p(\epsilon_1(\omega_p + \delta_2)) = 0$. Versuchen Sie δ_1 und δ_2 mit der Annahme $1/\tau < \omega_0 < \omega_p$ zu nähern.
Hinweis: Vernachlässigen Sie Terme mit höheren Potenzen als $(1/\tau)^2$ und ${\omega_0}^2$ von $1/\tau$ und ω_0 gegenüber ${\omega_p}^2$.

Aufgabe 3 Kramers-Kronig Relationen 2 (M, 30 P)

Die Anwendung der wie oben dargestellten Kramers-Kronig Relationen setzt voraus, dass man die Systemantwort für alle Frequenzen $-\infty < \omega < \infty$ kennen muss. Eine Alternative und für die Anwendung geschicktere Darstellung lautet

$$\Re(\hat{g}(\omega)) = \frac{2}{\pi}\mathcal{P}\int_0^\infty \frac{x\Im(\hat{g}(x))}{x^2-\omega^2}dx$$
$$\Im(\hat{g}(\omega)) = -\frac{2\omega}{\pi}\mathcal{P}\int_0^\infty \frac{\Re(\hat{g}(x))}{x^2-\omega^2}dx$$

a) (5 P) Zeigen Sie: Für eine kausale Antwortfunktion gilt stets

$$\Re(\hat{g}(\omega)) = \Re(\hat{g}(-\omega))$$
$$\Im(\hat{g}(\omega)) = -\Im(\hat{g}(-\omega))$$

d.h. der Realteil ist eine gerade und der Imaginärteil eine ungerade Funktion der Frequenz.

b) (10 P) Zeigen Sie mithilfe der Symmetriebedingungen die obigen Darstellungen der Kramers-Kronig Relationen.

c) (15 P) Bei der Herleitung der Kramers-Kronig Relationen wurde in der Vorlesung von dem Ausdruck

$$0 = \int_C \frac{\hat{G}(\hat{\omega}')}{\hat{\omega}'-\omega}d\hat{\omega}$$

ausgegangen mit $\hat{G}(\hat{\omega}')$ einer kausalen Antwortfunktion und C einer geschlossenen Kontur in der oberen komplexen Halbebene ohne die Polstelle $\hat{\omega}' = \omega$. Typischerweise kennt man den Real- oder Imaginärteil der Antwortfunktion nur in einem kleinen Frequenzbereich um ω. Der Nenner sorgt dafür, dass Beiträge für Frequenzen größer oder kleiner als ω wie $(\hat{\omega}'-\omega)^{-1}$ verschwinden, d.h. die genaue Form der hoch- und niederfrequenten Extrapolationen unwichtiger werden. Zeigen Sie, dass der Ansatz

$$0 = \oint_C \frac{\hat{G}(\hat{\omega}')}{(\hat{\omega}'-\omega)^n}d\hat{\omega}' \qquad ,n>1$$

bei dem die hoch- und niederfrequenten Beiträge noch stärker unterdrückt würden, nicht zu den bekannten oder vergleichbaren Kramers-Kronig Relationen führen.

Zusatzfragen

- Nenne ein Beispiel, bei dem die Skintiefe in der Anwendung wichtig ist.
- Wie kann man sich negative und komplexe Frequenzen vorstellen?
- Unter welchen Bedingungen gilt die Herleitung der Kramers-Kronig-Beziehungen?
- Was ist die Grundannahme des Lorentz-Modells? Also aus welchen Einheiten wird ein Festkörper in diesem Modell aufgebaut?
- Wie sind die mikroskopischen und makroskopischen Eigenschaften von Materie über das Lorentz-Modell miteinander verknüpft?
- „Wie gut“ ist das Lorentzmodell zur Betrachtung von Materieeigenschaften? Was kann damit verstanden werden? Was nicht?