Licht und Materie Übung II.2

Übungstermine: Gruppe 1 Di 15.05.18 (Raum 2.346), Gruppe 2 Do 17.05.18 (Raum 2.558), Gruppe 3 Fr 18.05.18 (Raum 2.558)

Hinweise: Jedes Übungsblatt besteht aus zwei regulären (gekennzeichnet mit einem *B*) und einer anspruchsvolleren *M*-Aufgabe. Die Aufgabenteile (a), (b), ... sind entsprechend ihrer Schwierigkeit mit Punkten gewichtet. Zur Erlangung des Scheins benötigen Bachelor- und Lehramtsstudenten 50% der gesamten Punktzahl (kombiniert aus *B*- und *M*-Aufgaben). Masterstudenten benötigen 50% der gesamten Punktzahl und zusätzlich 50% der Punktzahl aller *M*-Aufgaben. Es muss mindestens einmal an der Tafel vorgerechnet werden.

Aufgabe 1 (B, 15 P)

a) (10 P) Diskutieren sie das Lorentzmodell für den Fall verschwindender Dämpfung $1/\tau \to 0$. Ziehen Sie Schlussfolgerungen mithilfe der Kramers-Kronig Relationen über ein Material mit verschwindender Dämpfung.
b) (5 P) Was ist der konzeptionelle Zusammenhang zwischen Lorentz- und Drudemodell? Wie lassen Sie sich mathematisch ineinander überführen?

Aufgabe 2 (B, 35 P)

Die komplexe optische Leitfähigkeit eines Metalls nach dem Drude-Modell ist gegeben durch:

$$\hat{\sigma}(\omega) = \frac{\sigma_{dc}}{1 - i\omega\tau}$$

Dabei ist die Gleichstromleitfähigkeit gegeben durch:

$$\sigma_{dc} = 1/4\pi\ \omega_p^2\tau$$

a) (5 P) Plotten Sie den Verlauf der komplexen optischen Leitfähigkeit mit einer Plasmafrequenz von $\omega_p = 1 \times 10^{16}$ s^{-1}, 2×10^{16} s^{-1} und 5×10^{16} s^{-1} und einer Relaxationszeit von $\tau = 5 \times 10^{-14}$ s, 2.5×10^{-14} s und 1×10^{-14} s (halten Sie jeweils einen Parameter fest und variieren Sie den anderen. Sie sollten am Ende auf sechs Plots kommen). Welche Skalierung der x-Achse ist dabei sinnvoll? Wie verändern sich die Verläufe und geben Sie eine „physikalische“ Erklärung dafür.
b) (10 P) Bestimmen Sie das spektrale Gewicht eines Drude-Metalls. Interpretieren Sie mit diesem Ergebnis erneut die Schaubilder aus Aufgabe a).
c) (10 P) Die Reflektivität ist gegeben durch

$$R = \left|\frac{1-\hat{N}}{1+\hat{N}}\right|^2,$$

wobei der komplexe Brechungsindex gegeben ist durch

$$\hat{N} = \sqrt{\left(1 - \frac{4\pi\sigma_2}{\omega}\right)\mu_1 + i\frac{4\pi\mu_1\sigma_1}{\omega}}.$$

Plotten Sie die Reflektivität für die in a) gegebenen Werte und interpretieren Sie Ihr Ergebnis.
d) (10 P) Finden Sie (rechnerisch) den Wendepunkt von σ_1, und das Maximum von σ_2.
Zeigen Sie zudem, dass σ_1, aufgetragen gegen $\log(\omega)$ punktsymmetrisch und σ_2 spiegelsymmetrisch ist (in

Bezug auf welche Frequenz). In der Vorlesung wurde für die Halbwertsbreite von σ_2 als grobe Abschätzung der Faktor 10 genannt. Verifizieren Sie dies.

Aufgabe 3 (M, 30 P)

In der Vorlesung wurde die Drude-Theorie der Metalle analog zu der klassischen Argumention Drudes aus dem Jahr 1900 hergeleitet. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass auch eine quantenmechanische Rechnung zum gleichen Resultat führt, auch wenn von grundsätzlich anderen Annahmen ausgegangen wird. Der Ausgangspunkt für die quantenmechanische Herleitung der Drude-Gleichung ist die Kubo-Gleichung, die die Leitfähigkeit allgemein als Funktion der Frequenz ω und des Wellenvektors $\boldsymbol{q}$ (der eingestrahlten Photonen) darstellt.

$$\hat{\sigma}(\boldsymbol{q},\omega) = \frac{1}{\hbar\omega}\sum_s \int_0^\infty dt \langle s|\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q},0)\boldsymbol{J}^\dagger(\boldsymbol{q},t)|s\rangle e^{-i\omega t}$$

Hierbei ist $\boldsymbol{J}$ der Stromdichteoperator und die Elektronenzustände $|s\rangle$ bilden eine vollständige orthonormierte Basis.

a) (10 P) Zeigen Sie als erstes Zwischenresultat

$$\hat{\sigma}(\boldsymbol{q},\omega) = \frac{1}{\hbar\omega}\sum_s \sum_{s'} \int_0^\infty dt |\langle s|\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q},0)|s'\rangle|^2 e^{-i\omega t - t/\tau}$$

Nehmen Sie hierzu an, dass die Stromdichte bei einem festen Wert $\boldsymbol{q}$ auf der Zeitskala τ exponentiell verschwindet. Fügen Sie an geeigneter Stelle eine 1 in ihre Rechnung ein.

b) (10 P) Im Ortsraum ist der Stromdichteoperator definiert als

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) = -\frac{e}{2m}\sum_i [\boldsymbol{p}_i(\boldsymbol{r})\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i) + \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)\boldsymbol{p}_i(\boldsymbol{r})]$$

Versuchen Sie diese Definition nachzuvollziehen. Bilden Sie $\boldsymbol{J}(q)$ durch Fouriertransformation und zeigen Sie im Grenzfall $q \to 0$ das nächste Zwischenresultat

$$\hat{\sigma}(\boldsymbol{q},\omega) = \frac{e^2}{m^2\hbar\omega}\int_0^\infty dt\, e^{-i\omega t - t/\tau} \sum_{s,s',i} |\langle s|p_i|s'\rangle|^2$$

c) (10 P) Leiten Sie nun die Drude-Gleichung her, indem Sie ein freies Elektronengas annehmen, in dem

$$\Sigma_{s,s',i}|\langle s|p_i|s'\rangle|^2 = \hbar^2\boldsymbol{k}^2/2$$

gilt und ferner annehmen, dass die Photonenenergie vollständig absorbiert wird.

Zusatzfragen

- Was ist der Unterschied zwischen Halbleiter und Isolator?
- Wie kann man die Leitfähigkeit von Halbleitern erhöhen?
- Wie sieht die Absorption eines Halbleiters mit indirekter Bandlücke aus?(bzgl. der Photonenenergie)