Licht und Materie Übung II.1

Übungstermine: Gruppe 1 Di 23.04.19 (Raum 2.346), Gruppe 2 Do 25.04.19 (Raum 2.558)

Hinweise: Jedes Übungsblatt besteht aus zwei regulären (gekennzeichnet mit einem *B*) und einer anspruchsvolleren *M*-Aufgabe. Die Aufgabenteile (a), (b), ... sind entsprechend ihrer Schwierigkeit mit Punkten gewichtet. Zur Erlangung des Scheins benötigen Bachelor- und Lehramtsstudenten 50% der gesamten Punktzahl (kombiniert aus *B*- und *M*-Aufgaben). M.Sc.-Studenten benötigen 50% der gesamten Punktzahl und zusätzlich 50% der Punktzahl aller *M*-Aufgaben. Es muss zweimal an der Tafel vorgerechnet werden.

Aufgabe 1 Kramers-Kronig für Metalle (*B*, 20 P)

a) (15 P) Später in der Vorlesung werden Sie das Drude-Modell für die Leitfähigkeit von Metallen kennenlernen

$$\hat{\sigma} = \sigma_0 \frac{1}{1 - i\omega\tau} \,,$$

mit der (reellen) Gleichstromleitfähigkeit σ_0 und der mittleren Stoßzeit τ. Zeigen Sie, dass $\hat{\sigma}$ die Anforderungen für die Anwendbarkeit der Kramers-Kronig Beziehungen erfüllt.

b) (5 P) Zeigen Sie, warum eine (nicht-triviale) kausale Antwortfunktion, d.h. eine Funktion mit $g(t < 0) \equiv 0$ und $g(t > 0) \not\equiv 0$ stets zu einer komplexen Funktion $\hat{g}(\omega)$ in der Frequenzdomäne wird.

Aufgabe 2 Lorentz-Modell 1 (*B*, 20 P)

a) (5 P) Skizzieren Sie den Verlauf der komplexen dielektrischen Funktion $\hat{\varepsilon}(\omega)$ für den Fall eines Lorentz-Oszillators. Die Resonanzfrequenz sei gegeben als $\omega_0 = 100\ cm^{-1}$, die Plasmafrequenz als $\omega_p = 500\ cm^{-1}$ und die Dämpfung als $\tau = 50\ cm^{-1}$. Skizzieren Sie zudem für dieses Beispiel die komplexe optische Leitfähigkeit $\hat{\sigma}(\omega)$.

b) (5 P) Skizzieren Sie wie in a) den Verlauf der dielektrischen Funktion und der optischen Leitfähigkeit, nur dieses Mal mit einer Resonanzfrequenz von $\omega_0 = 200\ cm^{-1}$ (andere Parameter bleiben gleich).

c) (10 P) Die Nullstellen des Realteils der dielektrischen Funktion liegen ungefähr bei $\omega_0(\epsilon_1(\omega_0 + \delta_1)) = 0$ und $\omega_p(\epsilon_1(\omega_p + \delta_2)) = 0$. Versuchen Sie δ_1 und δ_2 mit der Annahme $1/\tau < \omega_0 < \omega_p$ zu nähern.
Hinweis: Vernachlässigen Sie Terme mit höheren Potenzen als $(1/\tau)^2$ und ω_0^2 gegenüber ω_p^2

Aufgabe 3 Lorentz-Modell 2 (*M*, 25 P)

a) (5 P) Zeigen Sie, dass für optische Medien mit $n_r \approx 1$ aus der dielektrischen Funktion des Lorentz-Oszillator-Modells der komplexe Brechungsindex $\hat{n} = n_r + i\kappa$ näherungsweise gefunden werden kann als (in SI-Einheiten)

$$n_r(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m_e} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

$$\kappa(\omega) = \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m_e} \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}.$$

b) (5 P) Was passiert bei den Grenzwerten für $\omega \to 0$, bzw. $\omega \to \infty$ (mathematisch und mikroskopisch)? Was bei ω_0? Was ist die Bedeutung von $\kappa(\omega)$?

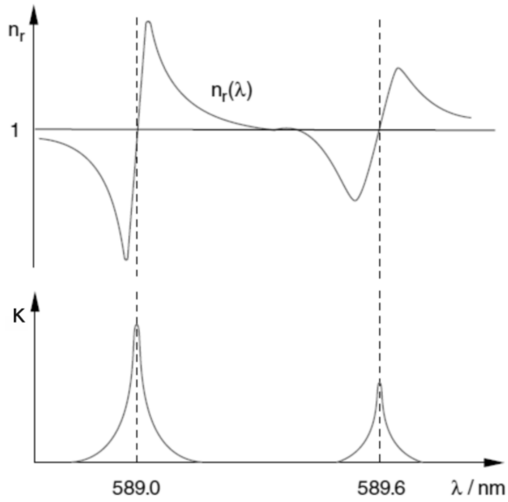

Abbildung 1 n_r und κ der Natrium D-Linien.

c) (15 P) Berechnen Sie die Gruppengeschwindigkeit $v_G = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$ und vergleichen Sie mit der Phasengeschwindigkeit v_{Ph}.
Welche Bereiche können Sie finden? Erläutern Sie diese anhand des Beispiels der Natrium D-Linien (Abbildung 1). An welchen Stellen wird die Absorption maximal? Erklären Sie die scheinbaren Widersprüche $v_{Ph} > c$ und $v_G > c$, mit c der Lichtgeschwindigkeit.

Zusatzfragen

- Was besagt Kausalität?
- Wie oder weshalb lassen sich negative Frequenzen umgehen?
- Erklären Sie die physikalischen Vorgänge, die hinter dem Lorentz-Modell stecken.