Licht und Materie Übung II.2

Übungstermine: Gruppe 1 Di 07.05.19 (Raum 2.346), Gruppe 2 Do 09.05.19 (Raum 2.558)

Hinweise: Jedes Übungsblatt besteht aus zwei regulären (gekennzeichnet mit einem *B*) und einer anspruchsvolleren *M*-Aufgabe. Die Aufgabenteile (a), (b), ... sind entsprechend ihrer Schwierigkeit mit Punkten gewichtet. Zur Erlangung des Scheins benötigen Bachelor- und Lehramtsstudenten 50% der gesamten Punktzahl (kombiniert aus *B*- und *M*-Aufgaben). M.Sc.-Studenten benötigen 50% der gesamten Punktzahl und zusätzlich 50% der Punktzahl aller *M*-Aufgaben. Es muss zweimal an der Tafel vorgerechnet werden.

Aufgabe 1 (B, 15 P)

a) (10 P) Diskutieren Sie das Lorentzmodell für den Fall verschwindender Dämpfung $1/\tau \rightarrow 0$. Ziehen Sie Schlussfolgerungen mithilfe der Kramers-Kronig Relationen über ein Material mit verschwindender Dämpfung.

b) (5 P) Was ist der konzeptionelle Zusammenhang zwischen Lorentz- und Drudemodell? Wie lassen sie sich mathematisch ineinander überführen?

Aufgabe 2 (B, 20 P)

Metalle erfüllen bei niedrigen Frequenzen die Bedingung $\omega\tau \ll 1$ und $1 \ll \sigma_0/\epsilon_0\omega$. Dieser Bereich wird Hagen-Rubens-Regime benannt.

a) (10 P) Warum kann man für die komplexe dielektrischen Funktion näherungsweise

$$\hat{\epsilon} \approx i\frac{\sigma_0}{\epsilon_0\omega} ,$$

mit σ_0 der Gleichstromleitfähigkeit, annehmen? Zeigen Sie, dass sich die Reflexion in diesem Bereich finden lässt als

$$R \approx 1 - \sqrt{\frac{8\epsilon_0\omega}{\sigma_0}} .$$

Stellen Sie den Verlauf qualitativ in einem Plot dar.

b) (10 P) Silber ist mit einem spezifischen Widerstand von $\rho = 1.62\ \mu\Omega\ \mathrm{cm}$ der beste elektrische Leiter unter den Metallen, wohingegen Quecksilber mit $\rho = 96\ \mu\Omega\ \mathrm{cm}$ ein relativ schlechter Leiter ist. Ihre Ladungsträgerdichten sind $n_{\mathrm{Ag}} = 5.86 \cdot 10^{22}\mathrm{cm}^{-3}$ bzw. $n_{\mathrm{Hg}} = 8.14 \cdot 10^{22}\mathrm{cm}^{-3}$. Vergleichen Sie das Reflexionsvermögen der beiden Metalle für eine Wellenlänge von $\lambda = 50\ \mu\mathrm{m}$ und überprüfen Sie, ob die Annahmen $\omega\tau \ll 1$ und $1 \ll \sigma_0/\epsilon_0\omega$ ausreichend erfüllt werden.

Aufgabe 3 (M, 30 P)

In der Vorlesung wurde die Drude-Theorie der Metalle analog zu der klassischen Argumention Drudes aus dem Jahr 1900 hergeleitet. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass auch eine quantenmechanische Rechnung zum gleichen Resultat führt, auch wenn von grundsätzlich anderen Annahmen ausgegangen wird. Der Ausgangspunkt für die quantenmechanische Herleitung der Drude-Gleichung ist die Kubo-Gleichung, die die Leitfähigkeit allgemein als Funktion der Frequenz ω und des Wellenvektors $\boldsymbol{q}$ (der eingestrahlten Photonen) darstellt.

$$\hat{\sigma}(\boldsymbol{q},\omega) = \frac{1}{\hbar\omega}\sum_s \int_0^\infty dt \langle s|\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q},0)\boldsymbol{J}^\dagger(\boldsymbol{q},t)|s\rangle e^{-i\omega t}$$

Hierbei ist $\boldsymbol{J}$ der Stromdichteoperator und die Elektronenzustände $|s\rangle$ bilden eine vollständige orthonormierte Basis.

a) (10 P) Zeigen Sie als erstes Zwischenresultat

$$\hat{\sigma}(\boldsymbol{q},\omega) = \frac{1}{\hbar\omega}\sum_s \sum_{s'} \int_0^\infty dt |\langle s|\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q},0)|s'\rangle|^2 e^{-i\omega t - t/\tau}.$$

Nehmen Sie hierzu an, dass die Stromdichte bei einem festen Wert $\boldsymbol{q}$ auf der Zeitskala τ exponentiell verschwindet. Fügen Sie an geeigneter Stelle eine 1 in ihre Rechnung ein.

b) (10 P) Im Ortsraum ist der Stromdichteoperator definiert als

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) = -\frac{e}{2m}\sum_{\boldsymbol{i}} [\boldsymbol{p_i}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_i}) + \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_i})\boldsymbol{p_i}(\boldsymbol{r})].$$

Versuchen Sie diese Definition nachzuvollziehen. Bilden Sie $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})$ durch Fouriertransformation und zeigen Sie im Grenzfall $\boldsymbol{q} \to 0$ das nächste Zwischenresultat

$$\hat{\sigma}(\boldsymbol{q},\omega) = \frac{e^2}{m^2\hbar\omega}\int_0^\infty dt\, e^{-i\omega t - t/\tau} \sum_{s,s'} |\langle s| \sum_i p_i |s'\rangle|^2 .$$

c) (10 P) Leiten Sie nun die Drude-Gleichung her, indem Sie ein freies Elektronengas annehmen, in dem

$$\sum_{s,s'} |\langle s| \sum_i p_i |s'\rangle|^2 = \frac{\hbar^2 \boldsymbol{k}^2}{2}$$

gilt und ferner annehmen, dass die Photonenenergie vollständig absorbiert wird.

Zusatzfragen

- Wieso lassen sich Halbleiter mit dem Lorentz-Modell beschreiben, obwohl nichts schwingt?
- Warum und wie können Elektronen eines Halbleiters in das Leitungsband gelangen?
- Wie unterscheiden sich direkte und indirekte Halbleiter?
- Welche Annahmen werden im Drude-Modell gemacht?