Licht und Materie Übung I.5

Übungstermine: Gruppe 1 Di 16.01.18 (Raum 2.120), Gruppe 2 Di 16.01.18 (Raum 2.561), Gruppe 3 Do 18.01.18 (Raum 3.123), Gruppe 2 Fr 19.01.18 (Raum 2.150)

Hinweise: Jedes Übungsblatt besteht aus zwei regulären (gekennzeichnet mit einem *B*) und einer anspruchsvolleren *M*-Aufgabe. Die Aufgabenteile (a), (b), ... sind entsprechend ihrer Schwierigkeit mit Punkten gewichtet. Zur Erlangung des Scheins benötigen Bachelor- und Lehramtsstudenten 50% der gesamten Punktzahl (kombiniert aus *B*- und *M*-Aufgaben). Masterstudenten benötigen 50% der gesamten Punktzahl und zusätzlich 50% der Punktzahl aller *M*-Aufgaben. Es muss mindestens einmal an der Tafel vorgerechnet werden.

Aufgabe 1 Granulation der Sonnenoberfläche (*B*, 20P)

In der Photosphäre der Sonne beobachtet man eine fluktuierende, körnige Struktur, die man als Granulation bezeichnet, siehe Abbildung 1. Dabei sind die Granulen heller als die zwischen ihnen liegenden, vergleichsweise dünnen Bereiche, in denen die Strahlungsleistung pro Fläche etwa 20% geringer ist als im hellen Inneren der Granulen.

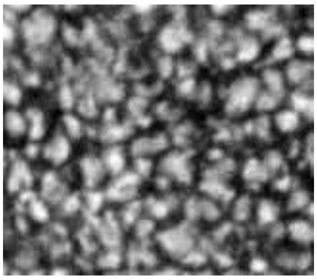

Abbildung 1 Granulation der Sonnenoberfläche.

a) (10P) Erklären Sie anhand des Aufbaus der Sonne das Zustandekommen der Granulen. Schätzen Sie die Größe einer einzelnen Granule ab, die von der Erde aus mit einem Winkeldurchmesser von etwa 5'' zu sehen ist.
b) (5P) Berechnen Sie den prozentualen Temperaturunterschied zwischen dem Inneren einer Granule und dem helleren, umgebenden Bereich. Wie kann man mit spektroskopischen Methoden herausfinden, dass es sich beim Ursprung der Granulen tatsächlich um Konvektionsströme im Inneren der Sonne handelt?
c) (5P) Zusätzlich zur Granulation der Sonnenoberfläche ist die Helligkeitsverteilung der Sonnenscheibe nicht über den gesamten Bereich konstant, sondern nimmt nimmt zum Rand der Sonnenscheibe ab. Erklären Sie wie es zu dieser Helligkeitsverteilung kommt.

Aufgabe 2 Ratengleichung im 2-Niveau System (*B*, 30P)

Betrachten Sie Übergänge der Energie $h\nu_0$zwischen den Niveaus $|1\rangle$ und $|2\rangle$ eines 2-Niveau Systems.

a) (5P) Welche Prozesse verändern die Besetzungszahlen N_1 und N_2? Stellen Sie die Ratengleichungen für die beiden Besetzungszahlen auf. Hinweis: Formulieren Sie die Ratengleichungen mit Hilfe der Einsteinkoeffizienten für spontane Emission A_{21}, stimulierte Emission B_{21} und Absorption B_{12} sowie der spektralen Dichte $u(\nu_0) = 8\pi h\nu_0^3/(c^3(\exp(\beta h\nu_0) - 1)$.
b) (10P) Zeigen Sie, dass für die Einsteinkoeffizienten im thermischen Gleichgewicht folgende Relationen gelten.

$$B_{21} = B_{12}$$
$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h\nu_0^3}{c^3}$$

Was ist die physikalische Bedeutung hinter der ersten Gleichung? Hinweis: Verwenden Sie die Planck'sche Strahlungsformel für die spektrale Energiedichte.
c) (10P) Zeigen Sie für die Änderung der Photonenzahldichte n die Gültigkeit der Ratengleichung

$$\frac{dn}{dt} = A_{21}N_2 + u(\nu_0)B_{21}(N_2 - N_1)$$

Warum kann man den ersten Term für den Laserbetrieb vernachlässigen? Man kann zeigen, dass in einem spektralen Bereich $\Delta\nu$ um ν_0 (vorgegeben durch das Lasermedium) die Änderung der spektralen Energiedichte gegeben ist durch

$$\frac{du(v_0)}{dt} = \frac{hv_0}{\Delta v} B_{21}(N_2 - N_1)u(v_0)$$

Finden Sie einen Ausdruck für die Laserintensität $I_{v_0} = cu(v_0)$ als Funktion der zurückgelegten Strecke im Lasermedium.

d) (5P) Um wieviel Prozent erhöht sich die Intensität pro Zentimeter Laufweg im Lasermedium eines Rubinlasers bei $v_0 = 4.326 \times 10^{14}$ Hz, $A_{21}^{-1} = \tau_{21} = 3\text{ms}$, $\Delta v = 2 \times 10^{11}$ Hz und $N_2 - N_1 = 5 \times 10^{17}\text{cm}^{-3}$? Was bedeutet dieser Wert für die Praxis?

Aufgabe 3 Thermisches und Kohärentes Licht (*M*, 30P)

In dieser Aufgabe werden Verteilungsstatistiken für thermisches Licht (wie das einer Glühbirne) und kohärentes Licht (wie im Falle eines Lasers) hergeleitet und interpretiert.

a) (10P) Thermisches Licht kann, aus klassischen Überlegungen heraus motiviert, als Summe harmonischer Oszillatoren beschrieben werden. Die Besetzung der Moden (Oszillatoren) erfolgt gemäß der Boltzmannverteilung. Im Folgenden betrachten wir eine einzelne Mode eines thermischen Strahlungsfeldes. Die Wahrscheinlichkeit, in einer Mode genau n Photonen zu finden ist

$$P_{th} = Ae^{-E_n(T,\omega)\beta}$$

mit $\beta^{-1} = k_B T$ und $E_n(T,\omega) = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$. Berechnen Sie die Normierungskonstante A und zeigen Sie, dass sich für den Erwartungswert $\langle n \rangle$ der Photonenzahl die Bose-Einstein Statistik ergibt. Benutzen Sie dieses Resultat und zeigen Sie

$$P_{th} = \frac{\langle n \rangle^n}{(1+\langle n \rangle)^{n+1}}$$

b) (10P) Betrachten Sie nun ein kohärentes Lichtfeld. Quantenmechanisch lässt sich ein kohärenter Zustand $|\alpha\rangle$ als unendliche Summe von Zuständen $|n\rangle$ mit fester Photonenzahl n beschreiben (Fock-Zustände) durch

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle\,,$$

Man kann zeigen, dass $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, sprich dass der kohärente Zustand ein Eigenzustand des Vernichtungsoperators mit dem Eigenwert $\alpha \in \mathbb{C}$ ist. Folgern Sie daraus, dass die Wahrscheinlichkeit, in einem kohärenten Zustand genau n Photonen zu finden, gegeben ist durch die Poissonverteilung

$$P_k(n) = e^{-\langle n \rangle} \frac{\langle n \rangle^n}{n!}$$

Hinweis: Verwenden Sie $\langle n \rangle = \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle$, $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ und $\langle \alpha | \hat{a}^\dagger = \alpha^* \langle \alpha |$.

c) (10P) Ob die Strahlung einer Lichtquelle thermisch oder kohärent ist, lässt sich durch ihre Photonenstatistik bestimmen. Hierzu werden, vereinfacht gesagt, die Zahl der Photonen einer bestimmten Mode pro Zeitintervall gezählt. Aus der relativen Varianz der Zählung, definiert als $V(n) = \frac{(\Delta n)^2}{\langle n \rangle^2} = \frac{\langle n^2 \rangle}{\langle n \rangle^2} - 1$, kann auf die Natur des Lichts geschlossen werden. Zeigen Sie, dass

$$V(n)_{th} = 1 + \frac{1}{\langle n \rangle}$$

$$V(n)_k = \frac{1}{\langle n \rangle}$$

Interpretieren Sie diese Resultate für den Fall großer Photonenzahlen. Welche Aussagen können Sie damit über das Emissionsverhalten für thermische und kohärente Strahler machen?

Zusatzfragen

- Was sind die Vor- und Nachteile eines Zwei-, Drei- und Vier-Niveau-Systems?
- Welche Arten von Lasern gibt es?
- Welche Funktion hat das „Trägermaterial“ (Saphir, YAG) bei Festkörperlasern? Bzw. wieso wird es benötigt?