

# Licht und Materie Übung I.1

Übungstermine: Gruppe 1 Di 07.11.17 (Raum 2.120), Gruppe 2 Di 07.11.17 (Raum 2.561), Gruppe 3 Do 09.11.17 (Raum 3.123), Gruppe 2 Fr 10.11.17 (Raum 2.150)

**Hinweise:** Jedes Übungsblatt besteht aus zwei regulären (gekennzeichnet mit einem  $B$ ) und einer anspruchsvolleren  $M$  Aufgabe. Die Aufgabenteile (a), (b), ... sind entsprechend ihrer Schwierigkeit mit Punkten gewichtet. Zur Erlangung des Scheins benötigen Bachelor- und Lehramtsstudenten 50% der gesamten Punktzahl (kombiniert aus  $B$ - und  $M$ -Aufgaben). Masterstudenten benötigen 50% der gesamten Punktzahl und zusätzlich 50% der Punktzahl aller  $M$ -Aufgaben. Es muss mindestens einmal an der Tafel vorgerechnet werden.

## Aufgabe 1 (B, 30 Punkte)

- (a) (10P) In der Vorlesung wurde folgende Formel zur Beschreibung des Regenbogens hergeleitet

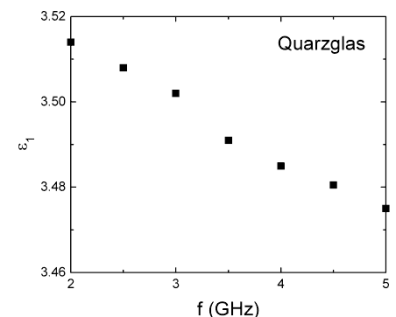
$$\varphi_\alpha = 180^\circ + 2\vartheta_1 - 4 \sin^{-1} \left( \frac{n_L}{n_W} \sin \vartheta_1 \right)$$

mit  $n_{L,W}$  den Brechungsindizes von Luft bzw. Wasser,  $\vartheta_1$  dem Einfallswinkel und  $\varphi_\alpha$  dem Ablenkwinkel (zur Lichtrichtung gemessen). Leiten Sie die entsprechende Formel für den zweiten (äußeren) Regenbogen her. Plotten Sie  $\varphi_\alpha(\vartheta_1)$  für beide Bögen (mit  $n_L = 1$ ) für verschiedene Wellenlängen im sichtbaren Bereich.

- (b) (10P) Unter welchem Winkel erscheint der erste Regenbogen, wenn er durch „Tropfen aus Quarzglas“ hervorgerufen wird? Hinweis: Verwenden Sie die Brechungsindizes  $n_G(\lambda = 447\text{nm}) = 1.466$ ,  $n_G(\lambda = 546\text{nm}) = 1.460$  und  $n_G(\lambda = 656\text{nm}) = 1.456$ . Wie sieht es im Fall eines Aerogels mit  $n = 1.02$  aus? Wie für einen „Tropfen aus Diamant“?

- (c) (5P) Auch für nicht sichtbares Licht kann es Regenbögen geben. Es wurden z.B. Infrarot-Regenbögen nachgewiesen. Diskutieren Sie, warum es bei Mikrowellenfrequenzen von z.B. 2 - 5 GHz in „natürlichem“ Regen keinen Regenbogen geben kann.

- (d) (5P) Könnte man einen „2 - 5 GHz“- Regenbogen in Quarzglaskugeln erzeugen?



## Aufgabe 2 (B, 15 Punkte)

- (a) Die Wechselwirkung zwischen Licht und Materie führt, je nach Energie der Strahlung, zu verschiedenen Anregungen von Atomen oder Molekülen. Erklären Sie kurz, wie die folgenden Bestandteile und Freiheitsgrade der Atome oder Moleküle mit der elektromagnetischen Strahlung wechselwirken und geben Sie jeweils die Frequenz, Wellenlänge und Energie der dafür benötigten Strahlung an. Ordnen Sie die Strahlung in das elektromagnetische Spektrum ein (Mikrowellen, Infrarot, ...) und nennen Sie je ein Beispiel eines Experiments oder technischer Anwendung auf Grundlage dieser Anregungen.

- Kernspin
- Elektronenspin
- Molekülschwingungen oder -rotationen
- Valenzelektronen
- Innere Elektronen
- Atomkern

### Aufgabe 3 (M, 30 Punkte)

In der Vorlesung wurden die Maxwell-Gleichungen im Vakuum behandelt. Bei einer endlichen Ladungsdichte  $\rho$  und elektrischen Strömen  $\mathbf{j}$  lauten die Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned}\nabla \mathbf{E} &= 4\pi\rho \\ \nabla \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

Im Folgenden (außer im Aufgabenteil (c)) gilt  $\rho = 0$  (keine Ladungen) und  $\mathbf{j} = 0$  (keine Ströme).

- (a) (5P) Leiten Sie aus den Maxwell-Gleichungen die Wellengleichung für die Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  her. Zeigen Sie, dass eine ebene Welle  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$  mit der Frequenz  $\omega$  und dem Wellenvektor  $\mathbf{k}$  die Wellengleichung für  $\mathbf{E}$  löst und interpretieren Sie das Resultat.
- (b) (5P) Die zu einem gewissen Grad vorhandene Analogie zwischen  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  erlaubt es, diese beiden physikalischen Messgrößen auf ein Vektorpotential  $\mathbf{A}$  mit  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  zurückzuführen. Zeigen Sie damit

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

- (c) (5P) Für  $\rho \neq 0$  muss obige Gleichung erweitert werden zu  $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ , wobei  $\phi$  das zu  $\rho$  gehörende Skalarpotential ist (verknüpft über die Poisson-Gleichung  $\Delta\phi \propto \rho$ ). Formulieren Sie die Maxwell-Gleichungen mithilfe der Potentiale  $\phi$  und  $\mathbf{A}$ . Worin besteht der Vorteil?
- (d) (10P) Formulieren Sie für  $\mathbf{A}$  eine Wellengleichung. Welche Eichung (Was ist das?) muss man wählen, wenn die Wellengleichung dieselbe Form wie Ihr Resultat in Aufgabenteil (a) haben soll? Der allgemeine Lösungsansatz dieser Wellengleichung lautet

$$A(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha} \gamma_{\mathbf{k}} \varepsilon^{\alpha} (a_{\mathbf{k},\alpha}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + a_{\mathbf{k},\alpha}^*(t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}})$$

mit  $\alpha = 1, 2$  den möglichen Polarisationszuständen,  $\varepsilon^{\alpha}$  den Einheitsvektoren für die Polarisationsrichtung,  $\gamma_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_{\mathbf{k}}}}$ ,  $V$  dem Systemvolumen und  $\omega_{\mathbf{k}}$  der zur Mode  $\mathbf{k}$  gehörenden Frequenz. Wie muss die Zeitabhängigkeit der Fourierkoeffizienten  $a_{\mathbf{k},\alpha}(t)$  im einfachsten Fall lauten, damit sie das Resultat aus Aufgabenteil (a) reproduzieren?

- (e) (5P) Die Energie im elektromagnetischen Feld ist

$$H = \frac{1}{8\pi} \int d\mathbf{r} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)$$

Formuliert man die Felder in obiger Gleichung mit Hilfe von  $\mathbf{A}$ , erhält man

$$H = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \hbar \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k},\alpha} a_{\mathbf{k},\alpha}^*$$

Kommt Ihnen diese Gleichung bekannt vor? Wie müsste diese Gleichung modifiziert werden, damit aus  $H$  („Hamiltonfunktion“) ein sinnvoller  $\hat{H}$  (Hamiltonoperator) wird?

### Zusatzfragen

- Wie ist die Größenordnung der Atomzahl bei einem Kristall im Vergleich zu einem normalen, im Labor verwendeten Gitter?
- Warum haben Regenbögen eine scharfe und eine „schwache“ Kante?
- Welche Eigenschaften von Ohr und Auge sind auch für ein Spektrometer wichtig?
- Ist das Auge ein (gutes) Spektrometer?
- Warum ist die Frequenz eine „fundamentaler“ Größe zur Beschreibung elektromagnetischer Wellen als die Wellenlänge?