Licht und Materie Übung I.1

Übungstermine: Gruppe 1 Di 06.11.18 (Raum 2.120), Gruppe 2 Do 08.11.18 (Raum 2.561), Gruppe 3 Fr 09.11.18 (Raum 2.150)

Hinweise: Jedes Übungsblatt besteht aus zwei regulären (gekennzeichnet mit einem *B*) und einer anspruchsvolleren *M* Aufgabe. Die Aufgabenteile (a), (b), ... sind entsprechend ihrer Schwierigkeit mit Punkten gewichtet. Zur Erlangung des Scheins benötigen Bachelor- und Lehramtsstudenten 50% der gesamten Punktzahl (kombiniert aus *B*- und *M*-Aufgaben). Masterstudenten benötigen 50% der gesamten Punktzahl und zusätzlich 50% der Punktzahl aller *M*-Aufgaben. Es muss mindestens einmal an der Tafel vorgerechnet werden.

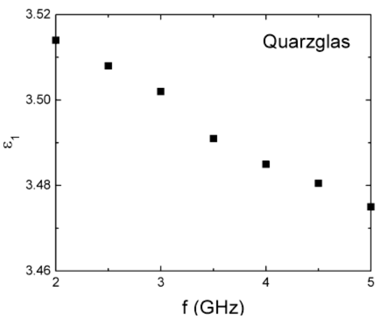
Aufgabe 1 (B, 30 Punkte)

(a) (10P) In der Vorlesung wurde folgende Formel zur Beschreibung des Regenbogens hergleitet

$$\varphi_a = 180° + 2\vartheta_1 - 4\sin^{-1}\left(\frac{n_L}{n_W}\sin\vartheta_1\right)$$

mit $n_{L,W}$ den Brechungsindizes von Luft bzw. Wasser, ϑ_1 dem Einfallswinkel und φ_a dem Ablenkwinkel (zur Lichtrichtung gemessen). Leiten Sie die entsprechende Formel für den zweiten (äußeren) Regenbogen her. Plotten Sie $\varphi_a(\vartheta_1)$ für beide Bögen (mit $n_L = 1$) für verschiedene Wellenlängen im sichtbaren Bereich.

(b) (10P) Unter welchem Winkel erschient der erste Regenbogen, wenn er durch „Tropfen aus Quarzglas“ hervorgerufen wird? Hinweis: Verwenden Sie die Brechungsindizes $n_G(\lambda = 447\text{nm}) = 1.466$, $n_G(\lambda = 546\text{nm}) = 1.460$ und $n_G(\lambda = 656\text{nm}) = 1.456$. Wie sieht es im Fall eines Aerogels mit $n = 1.02$ aus? Wie für einen „Tropfen aus Diamant“?

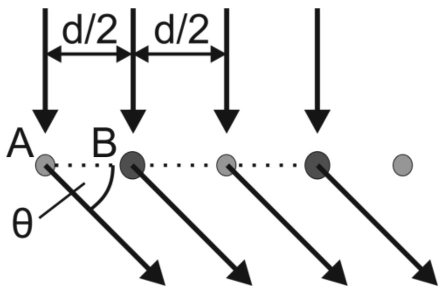


(c) (5P) Auch für nicht sichtbares Licht kann es Regenbögen geben. Es wurden z.B. Infrarot-Regenbögen nachgewiesen. Diskutieren Sie, warum es bei Mikrowellenfrequenzen von z.B. 2 - 5 GHz in „natürlichem“ Regen keinen Regenbogen geben kann.

(d) (5P) Könnte man einen „2 - 5 GHz“- Regenbogen in Quarzglaskugeln erzeugen?

Aufgabe 2 (B, 20 Punkte)

(a) (5P) Beugungsexperimente an Festkörpern lassen sich neben Licht auch mit Elektronen oder Neutronen durchführen. Vergleichen Sie diese drei Möglichkeiten im Hinblick auf deren Energien, sowie der Informationen, welche jeweils über den untersuchten Kristall erhalten werden können. Welche Untersuchungsmethode ist zu bevorzugen um kristallographische Eigenschaften an der Oberfläche eines Festkörpers zu untersuchen? Welche um magnetische Eigenschaften zu untersuchen?



(b) (5P) Ein Gitter mit Atomfolge ABAB... und einem Abstand $d/2$ zwischen den Atomen wird senkrecht mit Röntgenstrahlen beleuchtet, wie in der Abbildung dargestellt. Zeigen Sie, dass konstruktive Interferenz auftritt bei

$$d \cdot \cos\theta = n \cdot \lambda$$

mit θ dem Winkel zwischen der Atomkette und der Streurichtung.

(c) (10P) Der Strukturfaktor F_{hkl} des Gitters kann dazu verwendet werden die Intensität der erhaltenen Reflexe zu beschreiben. Er wird angegeben durch

$$F_{hkl} = \sum_i f_i \exp[2\pi\mathrm{i}(h\rho_i + k\sigma_i + l\tau_i)]$$

mit f_i den atomaren Streufaktoren, ρ, σ, τ den Koordinaten der primitiven Translation des Kristallgitters und h, k, l den Laue-Indizes. Wie verhält sich die Intensität des gebeugten Strahls für gerade und ungerade n der

Bragg-Bedingung des Gitters aus (b)? Wohin verschwindet das „Licht“ bei destruktiver Interferenz? Bleibt die Energie erhalten?

Aufgabe 3 (M, 30 Punkte)

In der Vorlesung wurden die Maxwell-Gleichungen im Vakuum behandelt. Bei einer endlichen Ladungsdichte ρ und elektrischen Strömen ***j*** lauten die Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \boldsymbol{E} = 4\pi\rho$$
$$\nabla \boldsymbol{B} = 0$$
$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

Im Folgenden (außer im Aufgabenteil (c)) gilt ρ = 0 (keine Ladungen) und ***j*** = 0 (keine Ströme).

(a) (5P) Leiten Sie aus den Maxwell-Gleichungen die Wellengleichung für die Felder ***E*** und ***B*** her. Zeigen Sie, dass eine ebene Welle $\boldsymbol{E}(\mathbf{r},t) = \boldsymbol{E_0}\exp[i(\omega t-\boldsymbol{kr})]$ mit der Frequenz ω und dem Wellenvektor **k** die Wellengleichung für ***E*** löst und interpretieren Sie das Resultat.

(b) (5P) Die zu einem gewissen Grad vorhandene Analogie zwischen ***E*** und ***B*** erlaubt es, diese beiden physikalischen Messgrößen auf ein Vektorpotential ***A*** mit $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ zurückzuführen. Zeigen Sie damit

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}\,.$$

(c) (5P) Für $\rho \neq 0$ muss obige Gleichung erweitert werden zu $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}$, wobei ϕ das zu ρ gehörende Skalarpotential ist (verknüpft über die Poisson-Gleichung $\Delta\phi \propto \rho$). Formulieren Sie die Maxwell-Gleichungen mithilfe der Potentiale ϕ und ***A***. Worin besteht der Vorteil?

(d) (10P) Formulieren Sie für ***A*** eine Wellengleichung. Welche Eichung (Was ist das?) muss man wählen, wenn die Wellengleichung dieselbe Form wie Ihr Resultat in Aufgabenteil (a) haben soll? Der allgemeine Lösungsansatz dieser Wellengleichung lautet

$$A(r,t) = \sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\alpha} \gamma_{\boldsymbol{k}}\, \varepsilon^{\alpha}\left(a_{\boldsymbol{k},\alpha}(t)e^{i\boldsymbol{kr}} + a^{*}_{\boldsymbol{k},\alpha}(t)e^{-i\boldsymbol{kr}}\right)$$

mit $\alpha = 1{,}2$ den möglichen Polarisationszuständen, ε^{α} den Einheitsvektoren für die Polarisationsrichtung, $\gamma_k = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_{\boldsymbol{k}}}}$, V dem Systemvolumen und $\omega_{\boldsymbol{k}}$ der zur Mode $\boldsymbol{k}$ gehörenden Frequenz. Wie muss die Zeitabhängigkeit der Fourierkoeffizienten $a_{\boldsymbol{k},\alpha}(t)$ im einfachsten Fall lauten, damit sie das Resultat aus Aufgabenteil (a) reproduzieren?

(e) (5P) Die Energie im elektromagnetischen Feld ist

$$H = \frac{1}{8\pi}\int d\boldsymbol{r}(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2)$$

Formuliert man die Felder in obiger Gleichung mit Hilfe von ***A***, erhält man

$$H = \sum_{\boldsymbol{k},\alpha} \hbar\omega_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k},\alpha}\, a^{*}_{\boldsymbol{k},\alpha}$$

Kommt Ihnen diese Gleichung bekannt vor? Wie müsste diese Gleichung modifiziert werden, damit aus H („Hamiltonfunktion“) ein sinvoller $\widehat{H}$ (Hamiltonoperator) wird?

Zusatzfragen

- Beschreiben Sie ein Experiment, mit dem man den Abstand zwischen zwei Kristallebenen bestimmen könnte.
- Wovon ist die Schärfe der Bragg-Reflexe abhängig?
- Ist ein Regenbogen immer gleich weit entfernt?
- Spielt der Brechungsindex beim Bragg-Reflex eine Rolle? Warum?
- Welches Beugungsmuster ergibt sich bei der Untersuchung von Wasser?