Licht und Materie Übung I.4

Übungstermine: Gruppe 1 Di 08.01.19 (Raum 2.120), Gruppe 2 Do 10.01.19 (Raum 2.561), Gruppe 3 Fr 11.01.19 (Raum 2.150)

Hinweise: Jedes Übungsblatt besteht aus zwei regulären (gekennzeichnet mit einem *B*) und einer anspruchsvolleren *M* Aufgabe. Die Aufgabenteile (a), (b), ... sind entsprechend ihrer Schwierigkeit mit Punkten gewichtet. Zur Erlangung des Scheins benötigen Bachelor- und Lehramtsstudenten 50% der gesamten Punktzahl (kombiniert aus *B*- und *M*-Aufgaben). Masterstudenten benötigen 50% der gesamten Punktzahl und zusätzlich 50% der Punktzahl aller *M*-Aufgaben. Es muss mindestens einmal an der Tafel vorgerechnet werden.

Aufgabe 1 Laserresonator (*B*, 15P)

(a) (10P) Ein Laserresonator besitzt eine Laserfrequenz von $\nu = 5 \cdot 10^{14}\ \mathrm{s}^{-1}$ und eine Länge von $L = 1\ \mathrm{m}$. Die beiden Spiegel sind dabei mit Stahlstangen verbunden, welche einen thermischen Ausdehnungskoeffizienten von $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$ besitzen. Wie ändert sich die Frequenz, wenn die Raumtemperatur des Labors im Winter $20°\mathrm{C}$ beträgt und im Sommer $23°\mathrm{C}$?

(b) (5P) Der Laserresonator wird nun umgebaut, sodass die Laserwelle im Resonator $40\ \mathrm{cm}$ pro Umlauf benötigt. Wie verschiebt sich die Laserfrequenz wenn sich der Luftdruck nun um $10\ \mathrm{mbar}$ ändert? ($n_{\mathrm{Luft,1\ atm}} = 1{,}00027$)

Aufgabe 2 Photoemissionsspektroskopie (*B*, 25P)

(a) (10P) Erklären Sie die Funktionsweise und den Aufbau eines Photoemissionsspektrometers. Welche grundlegende Annahme über die Natur des Lichts wird hier gemacht? Für ein unbekanntes Material wird für verschiedene Wellenlängen des einfallenden Lichts die maximale kinetische Energie der austretenden Elektronen wie folgt gemessen

λ in nm	578	529	489	436	403
E_{kin} in eV	0.13	0.39	0.48	0.78	1.05

Stellen Sie die Energie in einem Diagramm über der Frequenz dar und bestimmen Sie daraus die Grenzfrequenz, die mindestens nötig ist um Elektronen herauslösen zu können und berechnen Sie die Austrittsarbeit. Um welches Element könnte es sich hier handeln?

(b) (5P) Erklären Sie, wie winkelaufgelöste Photoemissionsspektroskopie (ARPES) funktioniert und erklären Sie den entsprechenden experimentellen Aufbau. Wie werden unterschiedliche Austrittswinkel und
–energien der Elektronen auf dem Detektor projiziert und unterschieden?

(c) (10P) Abbildung 1 zeigt eine Intensitätsverteilung eines ARPES-Experiments an Kupfer. Wie erhält man mit dem Polarwinkel θ und dem Azimuthwinkel ϕ der Austrittsrichtung sowie der kinetischen Energie E_{kin} eines Elektrons die hier betrachtete Impulskomponente k_x? Warum ergibt sich hier eine parabelförmige Struktur und wie hängt dies mit der Dispersionsrelation der Elektronen in Kupfer zusammen? Warum wird auch oberhalb der Fermi-Energie („Binding Energie“ = 0) noch etwas gemessen?

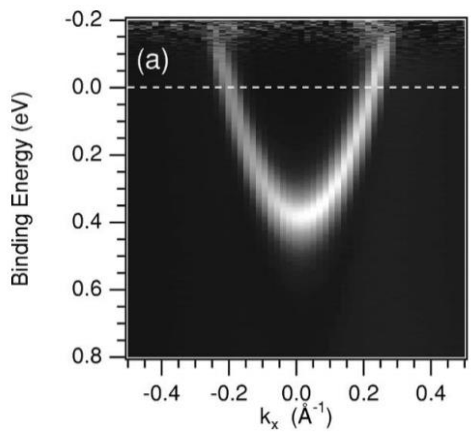

Abbildung 1 F. Baumberger et. al., Phys. Rev. B 64, 195411 (2011)

Aufgabe 3 Thermisches und Kohärentes Licht (*M*, 30P)

In dieser Aufgabe werden Verteilungsstatistiken für thermisches Licht (wie das einer Glühbirne) und kohärentes Licht (wie im Falle eines Lasers) hergeleitet und interpretiert.

a) (10P) Thermisches Licht kann, aus klassischen Überlegungen heraus motiviert, als Summe harmonischer Oszillatoren beschrieben werden. Die Besetzung der Moden (Oszillatoren) erfolgt gemäß der Boltzmannverteilung. Im Folgenden betrachten wir eine einzelne Mode eines thermischen Strahlungsfeldes. Die Wahrscheinlichkeit, in einer Mode genau n Photonen zu finden ist

$$P_{th} = Ae^{-E_n(T,\omega)\beta}$$

mit $\beta^{-1} = k_B T$ und $E_n(T,\omega) = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$. Berechnen Sie die Normierungskonstante A und zeigen Sie, dass sich für den Erwartungswert $\langle n \rangle$ der Photonenzahl die Bose-Einstein Statistik ergibt. Benutzen Sie dieses Resultat und zeigen Sie

$$P_{th} = \frac{\langle n \rangle^n}{(1+\langle n \rangle)^{n+1}}$$

b) (10P) Betrachten Sie nun ein kohärentes Lichtfeld. Quantenmechanisch lässt sich ein kohärenter Zustand $|\alpha\rangle$ als unendliche Summe von Zuständen $|n\rangle$ mit fester Photonenzahl n beschreiben (Fock-Zustände) durch

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle ,$$

Man kann zeigen, dass $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, sprich dass der kohärente Zustand ein Eigenzustand des Vernichtungsoperators mit dem Eigenwert $\alpha \in \mathbb{C}$ ist. Folgern Sie daraus, dass die Wahrscheinlichkeit, in einem kohärenten Zustand genau n Photonen zu finden, gegeben ist durch die Poissonverteilung

$$P_k(n) = e^{-\langle n \rangle} \frac{\langle n \rangle^n}{n!}$$

Hinweis: Verwenden Sie $\langle n \rangle = \left\langle \alpha \middle| \hat{a}^\dagger \hat{a} \middle| \alpha \right\rangle$, $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ und $\langle\alpha|\hat{a}^\dagger = \alpha^* \langle\alpha|$.

c) (10P) Ob die Strahlung einer Lichtquelle thermisch oder kohärent ist, lässt sich durch ihre Photonenstatistik bestimmen. Hierzu werden, vereinfacht gesagt, die Zahl der Photonen einer bestimmten Mode pro Zeitintervall gezählt. Aus der relativen Varianz der Zählung, definiert als $V(n) = \frac{(\Delta n)^2}{\langle n \rangle^2} = \frac{\langle n^2 \rangle}{\langle n \rangle^2} - 1$, kann auf die Natur des Lichts geschlossen werden. Zeigen Sie, dass

$$V(n)_{th} = 1 + \frac{1}{\langle n \rangle}$$

$$V(n)_k = \frac{1}{\langle n \rangle}$$

Interpretieren Sie diese Resultate für den Fall großer Photonenzahlen. Welche Aussagen können Sie damit über das Emissionsverhalten für thermische und kohärente Strahler machen?

Zusatzfragen

- Was sind die Frauenhoferlinien und warum werden sie „Linien“ genannt?
- Was versteht man unter dem Korrespondenzprinzip? Nennen Sie ein Beispiel.
- Beim Photoeffekt wird E_{kin} über hf aufgetragen. Wie lässt sich die kinetische Energie messen? Haben alle Elektronen diese kinetische Energie?