Licht und Materie Übung I.6

Übungstermine: Gruppe 1 Di 05.02.19 (Raum 2.120), Gruppe 2 Do 07.02.19 (Raum 2.561), Gruppe 3 Fr 08.02.19 (Raum 2.150)

Hinweise: Jedes Übungsblatt besteht aus zwei regulären (gekennzeichnet mit einem *B*) und einer anspruchsvolleren *M*-Aufgabe. Die Aufgabenteile (a), (b), ... sind entsprechend ihrer Schwierigkeit mit Punkten gewichtet. Zur Erlangung des Scheins benötigen Bachelor- und Lehramtsstudenten 50% der gesamten Punktzahl (kombiniert aus *B*- und *M*-Aufgaben). Masterstudenten benötigen 50% der gesamten Punktzahl und zusätzlich 50% der Punktzahl aller *M*-Aufgaben. Es muss mindestens einmal an der Tafel vorgerechnet werden.

Aufgabe 1 Kramers-Kronig Relationen (*B*, 20P)

In der Vorlesung haben Sie die Kramers-Kronig Relationen kennen gelernt, die Real- und Imaginärteil komplexwertiger physikalischer Antwortfunktionen $\hat{g}(\omega) = g_1(\omega) + i g_2(\omega)$ miteinander verknüpfen. Sie lauten

$$\Re\big(\hat{g}(\omega)\big) = \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im(\hat{g}(x))}{x-\omega}dx$$

$$\Im\big(\hat{g}(\omega)\big) = -\frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Re(\hat{g}(x))}{x-\omega}dx$$

wobei $\mathcal{P}\int$ das Hauptwertintegral bezeichnet.

a) (5 P) Betrachten Sie die optische Leitfähigkeit $\hat{\sigma}(\omega) = \sigma_1(\omega) + i\sigma_2(\omega)$. Berechnen Sie $\sigma_2(\omega)$ für den Fall eines perfekten Leiters mit $\sigma_1(\omega) = A\delta(\omega)$. Welche Materialien werden im Grenzfall niedriger Frequenzen durch eine solche Leitfähigkeit beschrieben?

b) (10 P) Der Realteil der optischen Leitfähigkeit einfacher Metalle wird durch

$$\sigma_1(\omega) = \frac{\sigma_0}{1+\omega^2\tau^2}$$

beschrieben, wobei σ_0 die Gleichstromleitfähigkeit und τ die Streuzeit bezeichnet. Berechnen Sie den entsprechenden Imaginärteil $\sigma_2(\omega)$ der Leitfähigkeit.

c) (5 P) Es sei nun $\hat{g}(\omega) = \hat{\chi}(\omega)$ die komplexwertige Suszeptibilität. Zeigen Sie, dass es kein (reales) dispersionsfreies Material geben kann (d.h. bei dem die optischen Funktionen keine Frequenzabhängigkeit aufweisen). Hinweis: Nehmen Sie χ_1 als Konstante an und führen sie dies zu einem Widerspruch.

Aufgabe 2 Fresnelgleichungen (*B,* 20P)

Die Fesnelgleichungen sind nützliche Gleichungen der geometrischen Optik, welche Reflexion und Transmission mit den Ein- und Ausfallswinkeln des Lichts und den Brechungsindizes verknüpft. Sie sind abhängig von der Polarisation des Lichts (parallel oder orthogonal) in Relation zur Oberfläche.

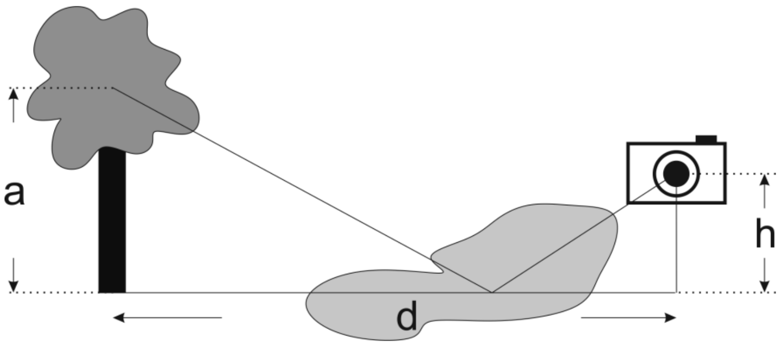

Abbildung 1 Skizze zum Strahlenverlauf des Lichtes bei Reflexion an einem See.

a) (5 P) Leiten Sie die Fresnelgleichungen her.

b) (10 P) Sie wollen die Reflexion eines Baumes in einem See fotografieren. Dazu stellen Sie sich an den Rand des Sees und betrachten den Baum durch ihre Kamera, wie in Abbildung 1 dargestellt. Der Baum ist a hoch, d entfernt und Ihre Kamera befindet sich h über dem Boden. Leiten Sie mit den

Fresnelgleichungen das Verhältnis der Lichtkomponenten senkrecht und parallel zur Einfallsebene her. Wie kann damit die Reflexion des Baumes hervorgehoben werden?

c) (5 P) Wie und warum können Sie mit einem Polfilter einen Regenbogen ebenfalls hervorheben?

Aufgabe 3 Kramers Kronig Relationen 2 (M 30P)

Die Anwendung der wie oben dargestellten Kramers-Kronig Relationen setzt voraus, dass man die Systemantwort für alle Frequenzen $-\infty < \omega < \infty$ kennen muss. Eine alternative und für die Anwendung geschicktere Darstellung lautet

$$\Re\big(\hat{g}(\omega)\big) = \frac{2}{\pi}\mathcal{P}\int_0^\infty \frac{x\Im\big(\hat{g}(\omega)\big)}{x^2-\omega^2}dx$$
$$\Im\big(\hat{g}(\omega)\big) = \frac{-2\omega}{\pi}\mathcal{P}\int_0^\infty \frac{\Re\big(\hat{g}(\omega)\big)}{x^2-\omega^2}dx$$

a) (5 P) Zeigen Sie: Für eine kausale Antwortfunktion gilt stets

$$\Re\big(\hat{g}(\omega)\big) = \Re\big(\hat{g}(-\omega)\big)$$
$$\Im\big(\hat{g}(\omega)\big) = -\Im\big(\hat{g}(-\omega)\big)$$

D.h. der Realteil ist eine gerade und der Imaginärteil eine ungerade Funktion der Frequenz.

b) (10 P) Zeigen Sie mit Hilfe der Gleichungen aus a) die obige Darstellung der Kramers Kronig Relationen.

c) (15 P) Bei der Herleitung der Kramers-Kronig Relationen wurde in der Vorlesung vom Ausdruck

$$0 = \int_C \frac{\hat{G}(\widehat{\omega}')}{\widehat{\omega}'-\omega}d\widehat{\omega}'$$

ausgegangen mit $\hat{G}(\widehat{\omega}')$ einer kausalen Antwortfunktion und *C* einer geschlossenen Kontur in der oberen komplexen Halbebene ohne die Polstelle $\widehat{\omega}' = \omega$. Typischerweise kennt man den Real- oder Imaginärteil der Antwortfunktion nur in einem kleinen Frequenzbereich um ω. Der Nenner sorgt dafür, dass Beiträge für Frequenzen größer oder kleiner als ω wie $(\widehat{\omega}'-\omega)^{-1}$ verschwinden, d.h. die genaue Form der hoch- und niederfrequenten Extrapolationen unwichtiger werden. Zeigen Sie, dass der Ansatz

$$0 = \oint_C \frac{\hat{G}(\widehat{\omega}')}{(\widehat{\omega}'-\omega)^n}d\widehat{\omega}, \quad n > 1$$

bei dem die hoch- und niederfrequenten Beiträge noch stärker unterdrückt würden, nicht zu den bekannten oder vergleichbaren Kramers-Kronig Relationen führen.

Zusatzfragen

- Warum benötigt man zwei unabhängige Messgrößen für die Spektroskopie?
- Weshalb kann die Divergenz des elektrischen Feldes in der Herleitung für die Wellengleichung in einem Medium gleich Null angenommen werden?
- Was bedeutet es, wenn physikalische Größen vektoriell bzw. als komplexwertige Funktionen ausgedrückt werden?
- Die Leitfähigkeit σ ist richtungsabhängig. Warum wird für die Herleitung der Dispersionsrelation in Materie σ nicht als Tensor betrachtet?