

Licht und Materie Übung I.3

Übungstermine: Gruppe 1 Di 05.12.17 (Raum 2.120), Gruppe 2 Di 05.12.17 (Raum 2.561), Gruppe 3 Do 07.12.17 (Raum 3.123), Gruppe 2 Fr 08.12.17 (Raum 2.150)

Hinweise: Jedes Übungsblatt besteht aus zwei regulären (gekennzeichnet mit einem B) und einer anspruchsvolleren M Aufgabe. Die Aufgabenteile (a), (b), ... sind entsprechend ihrer Schwierigkeit mit Punkten gewichtet. Zur Erlangung des Scheins benötigen Bachelor- und Lehramtsstudenten 50% der gesamten Punktzahl (kombiniert aus B - und M -Aufgaben). Masterstudenten benötigen 50% der gesamten Punktzahl und zusätzlich 50% der Punktzahl aller M -Aufgaben. Es muss mindestens einmal an der Tafel vorgerechnet werden.

Aufgabe 1 Strahlungsverteilung (B, 25 Punkte)

- (a) (10 P) Das Plancksche Strahlungsgesetz für die spektrale Energiedichte u ist in einem Wellenlängenintervall $\lambda \dots \lambda + d\lambda$ gegeben durch

$$u(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\beta hc/\lambda} - 1} d\lambda.$$

Finden Sie das Plancksche Strahlungsgesetz in Abhängigkeit eines Frequenzintervalls $\nu \dots \nu + d\nu$ und berechnen Sie damit die totale abgestrahlte Leistung $P(T)$, indem Sie das Integral bilden

$$P(T) = \int_{\text{Halbraum}} \frac{d\Omega}{4\pi} \int_A \vec{v} \cdot \vec{dA} \int_0^\infty u(\nu) d\nu = A \frac{c}{4} \int_0^\infty u(\nu) d\nu$$

mit A einer Fläche. Wie wird dieses Gesetz genannt? Berechnen Sie den Absolutwert der verbleibenden Konstanten.

- (b) (10 P) Finden Sie für sehr hohe Frequenzen $h\nu \gg k_B T$ eine Näherung für die spektrale Energiedichte (wie heißt dieses Gesetz?). Berechnen Sie daraus anschließend die Frequenz ν_{max} , bei der die meiste Energie abgestrahlt wird. Die Wellenlänge, bei welcher die meiste Energie abgestrahlt wird, beträgt hier $\lambda_{max} = 0.2 \frac{hc}{k_B T}$. Warum gilt scheinbar nicht $\nu_{max} \neq \frac{c}{\lambda_{max}}$?
- (c) (5 P) Ein Mensch mit 2 m^2 Hautfläche und einer Hauttemperatur von 34°C befindet sich in einem Raum mit 20°C Umgebungstemperatur. Wie viel Leistung strahlt er ab, wenn man seine Haut als schwarzen Strahler annimmt? Bei welcher Wellenlänge und Frequenz liegt das Strahlungsmaximum?

Aufgabe 2 Schwarzer Strahler (B, 35 Punkte)

- (a) (5 P) Geben Sie eine Beziehung an, mit der Sie die Temperatur in Abhängigkeit des Breitengrades auf der Erde abschätzen können. Berücksichtigen Sie nur die geometrisch bedingte unterschiedliche Sonneneinstrahlung und nehmen Sie die Erde als schwarzen Strahler an. Wie warm wäre es demnach in Deutschland bzw. Nordpol am Tag der Tag-und-Nacht-Gleiche, wenn es am Äquator 300 K warm ist? Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit den Literaturwerten und erklären Sie mögliche Unterschiede.
- (b) (10 P) Berechnen Sie die Temperatur T_s der Sonnenoberfläche unter der Annahme, dass die Sonne ein schwarzer Körper ist. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der tatsächlichen Temperatur. Hinweis: Die Solarkonstante auf der Erde beträgt $I_s = 1.37 \text{ kW/m}^2$, der Abstand Sonne-Erde beträgt etwa 8 Lichtminuten und der Radius der Sonne beträgt $R_s = 7 \times 10^5 \text{ km}$.
- (c) (10 P) Nimmt man an, dass ein Planet (I) keine Energiequelle außer seiner Sonne hat, (II) ein schwarzer Strahler ist und (III) seine Temperatur sich im thermischen Gleichgewicht zwischen Strahlungsabsorption und -emission einstellt, findet man für seine Temperatur

$$T^4 = \frac{I_0}{16\pi\sigma d^2}$$

Wobei $I_0 = 3.8 \times 10^{26} \text{ J/s}$ die pro Sekunde abgestrahlte Energie der Sonne, d der Abstand Planet-Sonne und σ die Stefan-Boltzmann Konstante ist. Leiten Sie diese Gleichung her und berechnen Sie die Temperatur, die man dementsprechend auf der Venus, Mars und Pluto erwarten würde. Vergleichen Sie Ihr Resultat mit der tatsächlichen Temperatur und erklären Sie mögliche Unterschiede.

- (d) (10 P) Erstellen Sie einen (sinnvollen!) gemeinsamen Plot mit der spektralen Ausstrahlung (gemessen in Leistung pro Fläche) eines schwarzen Körpers bei 6000 K, 300 K, und 3 K. Wieviel Prozent der Strahlungsleistung eines schwarzen Strahlers werden bei Raumtemperatur in dem für das menschliche Auge sichtbaren Energiebereich (400-700nm) abgegeben? Die Organe mancher Schlangenarten decken einen weitaus größeren Wellenlängenbereich ab und sind im Bereich 5-30 μ m am empfindlichsten. Welcher Temperatur entspricht dies? Geben Sie eine mögliche Erklärung dafür, dass manche Schlangen in diesem Wellenlängenbereich am empfindlichsten sind.

Aufgabe 3 Photonengas und Schwarzer Körper (M, 20P)

Betrachten Sie einen Hohlraum mit Volumen V . Die Innenwände des Hohlraums sind aus Metall der Temperatur T und reflektieren die sich im Inneren befindliche Strahlung. Wir betrachten im Folgenden das System im thermodynamischen Gleichgewicht und beschreiben die elektromagnetische Strahlung im Hohlraum durch ein ideales *Quantengas* von *Photonen*.

- (a) (5 P) Motivieren Sie den Ausdruck *ideales Quantengas*. Erklären Sie die Analogie zum idealen Gas der statistischen Mechanik und grenzen Sie *Quantengas* von *Quantenflüssigkeit* ab. Argumentieren Sie ob es eine *Photonenflüssigkeit* geben kann.
- (b) (10 P) In Aufgabe 3 des ersten Aufgabenblatts wurde das elektromagnetische Strahlungsfeld als Summe harmonischer Oszillatoren dargestellt. Jeder Oszillator ist charakterisiert durch einen Wellenvektor \mathbf{k} und Polarisation α . Jedes Photon einer Mode (\mathbf{k}, α) trägt mit $\hbar\omega_{\mathbf{k}}$ zur Gesamtenergie bei. Bei Vernachlässigung der Grundzustandsenergie gilt also

$$E = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \hbar\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}, \alpha}^* a_{\mathbf{k}, \alpha}$$

wobei $a_{\mathbf{k}, \alpha}^* a_{\mathbf{k}, \alpha}$ als „Besetzungswahrscheinlichkeit“ interpretiert werden und somit durch die Bose-Einstein Verteilungsfunktion $n_{\mathbf{k}, \alpha} = (\exp(\beta \hbar\omega_{\mathbf{k}}) - 1)^{-1}$ ersetzt werden kann ($\beta^{-1} = k_B T$). Zeigen Sie im Kontinuumslimites

$$E = \frac{\pi^2 V k_B^4}{15 \hbar^3 c^3} T^4$$

und leiten Sie unterwegs eine Gleichung für die spektrale Verteilung der Energiedichte $u(\omega)$ ab. Erstellen und interpretieren Sie den Graphen für $u(\omega)$.

- (c) (5 P) Vor Planck war bereits das aus klassischen Betrachtungen abgeleitete Gesetz von Rayleigh-Jeans für die spektrale Energieverteilung bekannt,

$$u_{RJ}(\omega) = \frac{k_B T}{\pi^2 c^3} \omega^2$$

Zeigen Sie, dass man die spektrale Energieverteilung nach Rayleigh-Jeans im „klassischen Limes“ $\hbar \rightarrow 0$ aus der Planckschen Strahlungsverteilung erhält. Welcher „physikalischer“ Limes ist das? Argumentieren Sie, inwieweit das Rayleigh-Jeans Gesetz zu physikalischen Problemen führt. Fügen Sie dem Plot aus Aufgabenteil (b) die Näherung nach Rayleigh-Jeans hinzu.

Zusatzfragen

- Wie groß ist die Temperatur der Sonne? Woher wissen wir das?
- Zeigen Sie in einem vereinfachten Modell den Treibhauseffekt der Erde und grenzen Sie dieses Modell zur Realität ab.
- Was ist Ozon und wie ist der Zusammenhang zwischen Ozon und UV-Strahlung auf der Erde?
- Woher kommen die Fraunhoferlinien?